NYTTIGE REGNEREGLER I MAKRO I/A (OG LIDT TAYLOR APPROKSIMATION)

GOUTHAM JØRGEN SURENDRAN

Resumé. Formålet med noten er at give et hurtigt overblik over regneregler som vil være nyttige i faget Makro I/A. Sidste afsnit er et kort opfriskning af Taylor-approksimation af 1. orden (nyttigt i kapitel 5 og frem).

Potensregneregler

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{1}$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{2}$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{3}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{4}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{5}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{6}$$
$$a^{-1} = \frac{1}{a} \tag{7}$$
$$a^0 = 1 \tag{8}$$
$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \tag{10}$$
$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}} \tag{11}$$
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{12}$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{13}$$
$$0^0 = 1 \tag{14}$$
$$0^p = 0 \quad p > 0 \tag{15}$$
$$(a^n + b^m)^p \neq a^{np} + b^{mp} \tag{16}$$

Potensregneregler i Grænsen

Potensregneregler når grundtallet $a \in [0, \infty[$ går mod grænserne 0 eller ∞, hvor $p \in]0, \infty[$ (mao. $a \geq 0$, $p > 0$):

$$\lim_{a \to \infty} a^p = \infty \tag{17}$$
$$\lim_{a \to \infty} a^{-p} = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{a^p} = 0 \tag{18}$$
$$\lim_{a \to 0} a^p = 0^p = 0 \tag{19}$$
$$\lim_{a \to 0} a^{-p} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a^p} = \infty \tag{20}$$

Potensregneregler når potensen $p \in [0, \infty[$ går mod grænserne 0 eller ∞, hvor $a \in]0, 1[$eller $a \in]1, \infty[$ (mao. $p \geq 0$ og $0 < a < 1$ eller $a > 1$):

$$\lim_{p \to \infty} a^p = 0 \quad , a \in]0, 1[\tag{21}$$
$$\lim_{p \to \infty} a^{-p} = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{a^p} = \infty \quad , a \in]0, 1[\tag{22}$$
$$\lim_{p \to 0} a^p = a^0 = 1 \quad , a \in]1, \infty[\tag{23}$$
$$\lim_{p \to 0} a^{-p} = \frac{1}{a^0} = 1 \ , a \in]1, \infty[\tag{24}$$

Date: 6. august 2015.

LN-regneregler

$$\ln(1) = 0 \tag{25}$$
$$\ln(e) = 1 \tag{26}$$
$$\ln(0) = \emptyset \tag{27}$$
$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a) \tag{28}$$
$$\frac{\mathrm{d}\ln(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{a} \tag{29}$$
$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \tag{30}$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \tag{31}$$
$$\ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b) \tag{32}$$
$$\ln(a-b) \neq \ln(a) - \ln(b) \tag{33}$$

En **VIGTIG** undtagelse for meget små værdier af x:

$$\ln(1+x) \approx \ln(1) + x = x \tag{34}$$
$$\frac{z-x}{x} = \frac{z}{x} - 1 \approx \ln(z) - \ln(x) = \ln\left(\frac{z}{x}\right) \tag{35}$$

Eksponentiel-regneregler

$$e^0 = 1 \tag{36}$$
$$e^1 = e \tag{37}$$
$$\frac{\partial e^{f(x)}}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot e^{f(x)} \tag{38}$$

Taylor-approksimation

Formålet med en Taylor-approksimation er, at omskrive en ikke-lineære funktion til en lineære funktion. Fordelen med lineære funktioner er at de er nemmere at arbejde med.

Vi har en given funktion $f(x)$ som vi ønsker at Taylor-approksimere i 1. orden omkring x_0. Altså vi ønsker at skrive ligningen om til følgende Taylorpolynomium:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Den nye funktion er kun en approksimation, men når x er tæt på x_0 er det ikke et problem.

Eksempel: Vi ønsker Taylor-approksimere den ikke-lineære funktion $f(x) = e^{ax}$ af 1.orden omkring $x_0 = 0$. Vi bestemmer først $f'_x(x)$ og hernæst $f(x_0)$ og $f'_x(x_0)$:

$$f'_x(x) = \frac{\partial e^{ax}}{\partial x} = ae^{ax}$$
$$f(x_0) = f(0) = e^{a \cdot 0} = 1$$
$$f'_x(x_0) = f'_x(0) = ae^{a \cdot 0} = a$$

hvormed vi får følgende Taylorpolynomium:

$$f(x) \approx 1 + a \cdot (x - 0) = 1 + ax \tag{39}$$

Hvis vi ønsker at finde værdien af $f(x)$ for et x nær $x_0 = 0$, kan vi altså bruge Taylorpolynomiet af 1. orden, ligning 39, i stedet for $f(x) = e^{as}$.

F.eks. $f(0,01)$ med $a = 2$:

$$f(x) = e^{2 \cdot 0,01} = 1,0202$$
$$f(x) \approx 1 + 2 \cdot 0,01 = 1,02$$

hvor vi først observerer en forskel ved 4. decimal.