Indhold

Lineær uafhængighed

Lineær uafhængighed Et vektorsæt i $\mathbb{R}^n$ siges at være lineær uafhængige, hvis og kun hvis ingen af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige vektorer.
Metoden; Reducer til Echelon-matrix, find intialle 1-taller i søjlerne (Hver søjler repræsentere en vektor). Vektorer uden et intialt 1-tal er en linearkombination af de øvrige vektorer.
Bemærk: Hvis man har et ortogonalt sæt af vektorer og ingen af dem er $\bar{0} \Rightarrow$ Sættet er lineært uafhængigt *
jf. Grassmanns udskifningssætning
Eksempel: Der givet følgende vektorer:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

Reducér

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{2}$$

Linearkombination; *Eksempel*: Her tages ud i den reducerede matrix i ligning (2)

$$u_3 = u_1 + u_2 \tag{3}$$

Dermed er koordinatsættet til u_3:

$$V_{u_3} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{4}$$

Basis; For en basis skal da gælder, at:

1. Basisvektorerne $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k)$ er linæert uafhængige
2. $Span\,\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k\}$

Eksempel: Betragt matricen i ligning (2). Udfra matricen ses, at de 2 første vektorer er lineært uafhængige, den 3. er en linearkombination af de to andre vektorer.
Grassmanns udskiftningssætning; Lad $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_p)$ være et lineært uafhængigt sæt af vektorer i $\Re^n$ og lad U= $span\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_p)\}$
Hvis $(\bar{a}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \ldots, \bar{b}_q)$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra U, gælder der at $q \leq p$ og det er muligt at udskifte q vektorer i sættet $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_p)$ med vektorerne fra $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \ldots, \bar{b}_p)$, således at dette nye sæt er lineært uafhængig og udspænder U.

Gram-Schmidt's ortonormalisering For en vektorsættet (a_1, a_2, a_3) som er en basis for $\mathbb{R}^3$, bestemmes **ortonormalebasis** (b_1, b_2, b_3) for (a_1, a_2, a_3) således):

$$c_1 = a_1 \tag{5}$$
$$c_2 = a_2 - \frac{a_2 c_1}{c_1 c_1} c_1 \tag{6}$$
$$c_3 = a_3 - \frac{a_3 c_2}{c_2 c_2} c_2 \tag{7}$$

(c_1, c_2, c_3) er en ortogonalbasis for (a_1, a_2, a_3)

$$b_1 = \frac{1}{||c_1||} c_1 \tag{8}$$
$$b_2 = \frac{1}{||c_2||} c_2 \tag{9}$$
$$b_3 = \frac{1}{||c_3||} c_3 \tag{10}$$

Dermed er den ortonormale basis (b_1, b_2, b_3) for (a_1, a_2, a_3) bestemt.

Lineær afbildninger

Lineær afbildning T: $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ Følgende betingelser skal gælde for en lineær afbildning T: $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$:

1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{x} + \bar{y}) = T\bar{x} + T\bar{y}$
2. $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \forall \lambda \in \mathbb{R} : T(\lambda \bar{x}) = \lambda T(\bar{x})$
   - $T(\bar{0}) = \bar{0}$ (Nødvendig betingelse)
   - $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} : T(-\bar{x}) = -T(\bar{x})$ (Nødvendig betingelse)

Bemærk Det gælder at, hvis $T\bar{y} = \lambda \bar{y}$, hvor λ er en skalaring $(\lambda \neq 0)$ da er λ en egenværdi for T-matricen og $\bar{y}$ den tilhørende egenvektor for λ. *
Rang; Antallet dimensioner matricen spænder over. Dette kan bestemmes ud fra antallet af ledende 1-taller i Echelon-matricen. rg(A)
Fuldrang; For en matrix $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, hvor antallet af ledende 1-taller er n (dermed lig antallet af rækker) Den kan dermed omdannes til Echelon-matrice.
Underrums dimensioner; dim(U) er det maksimale antal lineært uafhængige vektorer i U
Bemærk: $dim(U) + dim(U^{\perp} = dim(\mathbb{R}^n) = n$ *
Eksempel: Hvis $U = span\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow dim(U) = 2$
Nulrummet $N(T) = \{x \in \mathbb{R}^n | T\bar{x} = \bar{0}\}$ Nulrummet for den lineære afbildning T, er de $\bar{x}$, hvor lineære afbildning er $\bar{0}$, ergo $x \in N(T) \Leftrightarrow T\bar{x} = \bar{0}$:

$$T\bar{x} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Eksempel:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{cc} x_1 + x_3 = 0 & \Rightarrow x_1 = -x_3 \\ x_2 + x_3 & \Rightarrow x_2 = -x_3 \\ x_3 \text{ er fri} & \end{array} \tag{13}$$

Med dette findes udspændet af nulrummet;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \neq 0 \tag{14}$$

Derud fra gælder, at:

$$N(T) = span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{15}$$

Billedrummet $R(T) = \{Tx|x \in \mathbb{R}^n\} = \{y \in \mathbb{R}^m | \exists x \in \mathbb{R}^n : Tx = y\}$. Dimensionen af billedetrummet er det samme som rangen af matricen, dvs. rg(T)=dim(R(T))
Injektiv; At en lineær afbildning rammer punkter maksimalt én gang.
For en injektiv lineær afbildning, T: $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$, gælder, at nulrummet kun består af nulvektoren, $N(T) = \{\bar{0}\}$.
Surjektiv; At en lineær afbildning, $T : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$, rammer alle punkter i $\mathbb{R}^m$ mindst én gang. Afbildningsmatricen skal derfor være af fuld rang.
Bemærk: T: $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ hvor $n \neq m$, da kan afbildningsmatrice aldrig være surjektiv.
Bijektiv; En lineær afbildning, T: $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$, der både er injektiv og surjektiv. Dermed rammer T alle punkter i $\mathbb{R}^n$ én gang. Hvis og kun hvis afbildningsmatrice er en regulær matrice, hvormed den kan omdannes til en enhedsmatrix. Dermed vil T også have en invers matrice T^{-1}, hvor $TT^{-1} = I$
Isometri; Her gælder at $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|T\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$

Spektralteori

Spektralsætningen; Hvis en kvadratisk matrice A nxn er **diagonaliserbar** (har dermed n forskelige egenværdier og egenvektorer)da gælder;

$$A = VDV^{-1} \tag{16}$$

hvor V har egenvektorer i søjlerne og D er diagonalmatricen med egenværdier i diagonalen.
Spektralteorien for symmetriske matricer For en symmetrisk matrice A findes D og Q;

1. for D: skrive egenværdier i diagonalen

2. for Q: bruge de tilhørende normerede egenvektorer som søjler

Der gælder derfra, at:

$$D = Q^{-1}AQ = Q^TAQ \tag{17}$$

jf. spektralsætningen, hvor D er diagonalmatrice med egenværdierne og Q er en ortogonalmatrice med egenvektorer som søjler.
Sporafbildningen; Er en linære afbildningen, der giver summen af diagonalen.
Bemærk: For kvardratiske matrice gælder følgende; $Tr(AB) = Tr(BA), Tr(A) = Tr(A^t)$, $(A|B) = Tr(A^tB) = Tr(B^tA)$ *Eksempel:* Ud fra matricen T i ligning (12) vil sporafbildning: *

$$Tr(T) = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 1 + 1 + 2 = \underline{4} \tag{18}$$

Egenværdimultiplikatoren; Antallet af dimensioner den tilhørende egenvektor(er) for egenværdien spænder over, $em_A(\lambda_i)$.
Bemærk $0 \leq em_A(\lambda_i) \leq rm_A(\lambda_i)$, og for symmetriske matricer $rm_A(\lambda_i) = em_A(\lambda_i)$ *
Rodmultiplikatoren; Antallet af gange et tal er egenværdi for matricen, $rm_A(\lambda_i)$.

Funktionskalkyle for symmetriske kalkyler

Spektret Er $\sigma(A)$ (mængden af egenværdierne=spektret).
For en symmetrisk matrice (jf. spektralteorien) og $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret på spektret gælder, at:

$$f(A) = f(QDQ^{-1}) = Qf(D)Q^{-1} \tag{19}$$

Bemærk sin(A), cos(A) og e^A er defineret for alle symmetriske matricer. ln(A) er defineret for alle matricer, som er positiv definit. Positiv definit $\Rightarrow$ egenværdierne≥ 0 (se *Definit*5) *
Specialtilfælde;

$$det(f(A)) = det(QDQ^{-1}) = det(Q)det(f(D))det(Q^{-1}) = det(QQ^{-1})det(f(D)) = det(f(D)) \tag{20}$$

Bemærk at man da kan udlede, at en matrice A ikke er regulær, hvis den har en egenværdi 0, da determinanten til diagonalmtricen, da vil være 0. *

Komplekse tal

Komplekse tal; $a + bi \in \mathbb{C}$, hvor i er den imaginære tal
Imaginære tal; $i = \sqrt{-1}$. Betragt det imaginære tal som et værktøj/definition, hvor man inddrager $\sqrt{-1}$ til de realle tal. F.eks.:

$$f(z) = az^2 + bz + c = 2z^2 - 4z + 4 = 0; d = (-b)^2 - 4ac = -16 \tag{21}$$

For realle tal,$\mathbb{R}$, er det ikke muligt at bestemme rødder for f(z). Men med de komplekse tal (og dermed også i), $\mathbb{C}$, kan man arbejde videre:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{4} = 1 + \sqrt{-1} = 1 + i \tag{22}$$

Newtons binomialformel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 \dots \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \tag{23}$$

hvor $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$
Reale del; $Re\,(cos(nx) + isin(nx)) = cos(nx)$ *
Imaginære del; $Im\,(cos(nx) + isin(nx)) = sin(nx)$ *
Eulers lov

$$e^{inx} = cos(nx) + isin(nx); x, n \in \mathbb{R} \tag{24}$$

$$cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \tag{25}$$

$$sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}; x, n \in \mathbb{R} \tag{26}$$

Eksempel; Vi får givet følgende $\int cos^3(x)dx$:

$$cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3 \tag{27}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\binom{3}{0} e^{3ix} + \binom{3}{1} e^{ix} + \binom{3}{2} e^{-ix} + \binom{3}{3} e^{-3ix}\right) \tag{28}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(cos(3x) + 3cos(x)\right) \tag{29}$$

$$\int cos^3(x)dx = \frac{1}{4}\int cos(3x) + 3cos(x)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}sin(3x) + 3sin(x)\right) + k \tag{30}$$

De Moivre's formel Formellen er således og benyttes til at omdanne cos og sin:

$$(cos(x) + isin(x))^n = cos(nx) + isin(nx); x \in \mathbb{R} \tag{31}$$

Eksempel; Bestem $cos(2x)$,$sin(3x)$,$os(3x)$ og $sin(3x)$, udnyt real del, imaginær del og $cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$:

$$cos(2x) = Re\left((cos(x) + sin(x))^2\right) = Re\left(cos^2(x) - sin^2(x) + 2cos(x)isin(x)\right) \tag{32}$$
$$= cos^2(x) - sin^2(x) = cos^2(x) + (cos^2(x) - 1) = \underline{2cos^2(x) - 1} \tag{33}$$
$$sin(2x) = Im\left((cos(x) + sin(x))^2\right) = \underline{2cos(x)sin(x)} \tag{34}$$
$$cos(3x) = Re\left((cos(x) + sin(x))^3\right) = Re\left(cos^3(x) + 3cos(x)^2isin(x) - 3cos(x)sin(x)^2 - isin^3(x)\right) \tag{35}$$
$$= cos^3(x) - 3cos(x)sin(x)^2 = cos^2(x) + 3cos(x)(sin^2(x) - 1) = \underline{4cos^3(x) - 3cos(x)} \tag{36}$$
$$sin(3x) = Im\left((cos(x) + sin(x))^3\right) = 3cos(x)^2sin(x) - sin^3(x) = \underline{3sin(x) - 4sin(x)^4} \tag{37}$$
$$\tag{38}$$

Egenværdier
For diagonal- og trekantsmatricer Egenværdierne aflæses i diagonalen.
Generelt Bestem det karakteristiske polynomium for en 3x3 matrice. Dette kan gøres på to måder. Her bruges den generelle metoder for matricer, hvor der udvikles om 1. søjle (kaldes strkla Places' udviklingsformel);

$$P_{A(t)} = det(A - tE_3 = \begin{vmatrix} a-t & b & c \\ d & e-t & f \\ g & h & i-t \end{vmatrix} \tag{39}$$
$$= (-1)^{1+1}(a-t)\begin{vmatrix} e-t & f \\ h & i-t \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i-t \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}g\begin{vmatrix} b & c \\ e-t & f \end{vmatrix} \tag{40}$$

Egenværdierne λ_1, λ_2 og λ_3, er de (3) t'er, hvor det karakteristiske polynomium er 0.
Husk: Noter her $rm_A(\lambda_i)$. Dette er antallet af gange tallet for λ_i er rod til det karakteriske polynomium. *
EgenvektorerBestem de tilhørende egenvektorer ved at reducere den karakteriske polynomium for hver egenværdi. Eksempel for en given matrice og en egenværdi 3:

$$P_{A(3)} = A - 3E_3 = \begin{pmatrix} 1-3 & 2 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 \\ 0 & 0 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ er fri} \\ x_3 = 0 \end{matrix} \tag{42}$$

Med dette kan man finde egenvektoren for egenværdien 3 således:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \neq 0 \tag{43}$$

Derud fra gælder, at:

$$V_A(3) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{44}$$

Husk: Noter her $em_A(\lambda_i)$. Dette er antallet af dimensioner egenvektoren spænder over (tæl vektorer i $V_A(i)$). *
Egenværdimultiplikatoren, $em_A(3)$ er 1.
Definit For en symmetrisk matricer gælder følgende:

1. A er positiv definit, hvis og kun hvis samtlige egenværdier er positive

2. A er positiv semidefinit, hvis og kun hvis samtlige egenværdier er ikke-negativ
3. A er negativ definit, hvis og kun hvis samtlige egenværdier er negative
4. A er negativ semidefinit, hvis og kun hvis samtlige egenværdier er ikke-positive

Polynomisk division Polynomisk division kan benyttes til at reducere et polynomium til f.eks. 2.gradsligning. F.eks. kan følgende 3.gradsligning reduceres:

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + da \neq 0 \tag{45}$$

1. Find alle q, således at $\frac{d}{q} = p$, hvor $q, p \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} \rightarrow$Heltal)
2. Find et q, hvor $f(q_i) = 0$. Dette er 1 af 3 løsninger til f(t)(Èn er nok).
3. Divider f(t) med $t - q_i$, hvor q_i opfylder $f(q_i) = 0$.
4. Løs 2.gradsligningen fra den polynomiske division.
5. Løsningen for f(t) er da q_i fra punkt 2 og løsningerne fra punkt 4. Fås kun 2 løsninger er den ene en dobbeltrod. Dobbeltroden er den, der opopfylder $f'(t) = 0$

Eksempel: Der er givet følgende ligning:

$$g(t) = -t^3 + 3t + 2 \tag{46}$$

1. Her ses at; $q_1 = 1, q_2 = -1, q_3 = 2, q_4 = -2$
2. Ved at indsætte, indses at $g(-1) = 0$ og $g(2) = 0$
3. Her udnyttes $q_2 = -1$ og g(t) divideres derfor med $t - (-1)$:

$$\begin{array}{rrl} t+1 & \left| -t^3 + 3t + 2 \right| & -t^2 + t + 2 = \tilde{g}(x) \\ & \underline{-t^3 - t^2} & \\ & t^2 + 3t + 2 & \\ & \underline{t^2 + t} & \\ & 2t + 2 & \\ & 2t + 2 & \end{array} \tag{47}$$

4. Rødderne til 2.gradsligningen $\tilde{g}(x)$ er dermed $t_2 = -1$,$t_3 = 2$
5. Løsningen er for $f(t) = 0$ er da $t_1 = -1$,$t_2 = -1$ og $t_3 = 2$ (-1 er dobbeltrod)

(Hvad ethvert dannet menneske skal vide om) Uendelige rækker af funktioner

Sum for endelige rækker; Det gælder følgende for en sumfunktioen:

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}; |x| < 1 \tag{48}$$

Sum for uendelige rækker; Det gælder følgende for en sumfunktioen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}; |x| < 1 \tag{49}$$

Summen for funktion; For en funktion g(x), der er C^∞ og rækket $\sum_{n=0}^{\infty}(g(x))^n$ er konvergent for x$\in [a; b]$, da gælder, at:

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(g(x))^n = \frac{1}{1 - g(x)} \text{ på } x \in [a; b] \tag{50}$$

Når der gives opgaver i sum af funktioner, giver oftest følgende spørgsmål:

1. For hvilke x er $\tilde{g}(x)$ defineret/For x er rækken konvergent.
   Løs da $|g(x)| < 1 \Leftrightarrow x \in I$.

2. Hvad er regneforskriften for $\tilde{g}(x)$:
   $\frac{1}{1-g(x)}$ *for* $x \in I$

3. Monotoniforhold $\tilde{g}$ differentiabel:
   Beregn $\tilde{g}'(x)$ Bemærk at $\tilde{g}'(x) = \frac{g'(x)}{(1-g(x))^2}$, hvormed $g(x)$ og $\tilde{g}'(x)$ har samme monotoniforhold

4. Værdimængden for $\tilde{g}(x)$
   Udnyt monotoniforholdene og $x \in I$

Bemærk Der kan gives en gives en ekstra, der ofte er modificeret version af den første sumrække. Der er oftest funktionen g(x) differentieret. En metode til at bevise dette ses forneden: *

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot f(x)^n = a + af(x) + af(x)^2 + af(x)^3 + \dots \tag{51}$$

$$\tilde{g}'(x) = 0 + af'(x) + 2af'(x)f(x) + 3af'(x)f(x)^2 + \dots \tag{52}$$

$$= af'(x)(1 + 2f(x) + 3f(x)^2 + \dots) \tag{53}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} af'(x)(n+1)f(x)^n \tag{54}$$

Fra punkt 3 vides at regneforskriften for $\tilde{g}'(x)$ er:

$$\tilde{g}'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} af'(x)(n+1)f(x)^n = \frac{g'(x)}{1-g(x)} \tag{55}$$

Indeks