Elasticiteter, semielasticiteter og logaritmisk differentiation i Makro I/A

Goutham Jørgen Surendran

6. august 2015

Resumé

Formålet med noten er at give en hurtig introduktion til en alternative udledning af elasticitet, definere semielasticitet og vise hvordan semielasticitet kan bruges til at bestemme kritiske punkter for en funktion. Sidstnævnte er nyttigt når en funktion består af mange produktled.

Noten er <u>ikke</u> pensum, men metoderne vil hyppigt blive brugt i Makro i/A.

1 Elasticiteter og logaritmisk differentiation

Definition af elasticitet[1]

Når x og y begge antager positive værdier og y er en funktion der er differentiable mht. x, da gælder at:

$$\text{Elasticitet} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d\ln y}{d\ln x} \tag{1}$$

hvor det sidste lighedstegn kun holder, hvis $\ln y$ er differentiable mht. y og $x \left(= e^{\ln x}\right)$ er en differentiable mht $\ln x$.

$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$: Udtrykket efter 1. lighedstegn følger af den matematiske definition af elasticitet.

$\frac{d\ln y}{d\ln x}$: Udtrykket efter 2. lighedstegn er (muligvis) nyt og udtrykket vi ønsker at bevise.

Vi ganger udtrykket efter 2. lighedstegn i (1) med $dy/dy \times dx/dx = 1$:

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{d\ln y}{d\ln x} \times \frac{dy}{dy}\frac{dx}{dx} = \frac{d\ln y}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\ln x} \tag{2}$$

Bemærk at for leddene $\frac{d\ln y}{dy}$ og $\frac{dx}{d\ln x}$ gælder at:

$$\frac{d\ln y}{dy} = \frac{1}{y} \tag{3}$$

$$\frac{dx}{d\ln x} = \frac{de^{\ln x}}{d\ln x} = e^{\ln x} = x \tag{4}$$

Ligning (3) og (4) indsættes i (2) hvormed (1) er bevist:

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}x = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \text{Elasticitet} \ \blacksquare$$

[1] Se desuden en grafisk illustration af substitutionselasticitet i Sydsæter bind 1, 7.udgave, side 459

2 Semielasticitet

Elasticitet udtrykker den **procentvise** ændring i y når x ændres med én **procentdel**. ***Semi-elasticitet*** udtrykker den **procentvise** ændring i y når x ændres med én enhed. (F.eks. den relative ændring i BNP, når renten øges med ét %-point).

Når x og y begge antages at være positive værdier og y er en funktion som er differentiable mht. x gælder det at:

$$Semi-elasticitet = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \underline{\frac{d\ln y}{dx}} \tag{5}$$

For at bevise udtrykket efter 2. lighedstegn i (6), ganger vi udtrykket med $dy/dy = 1$:

$$\frac{d\ln y}{dx} = \frac{d\ln y}{dx} * \frac{dy}{dy} = \frac{d\ln y}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{6}$$

(3) indsættes i (6) hvormed (5) er bevist:

$$\frac{dlny}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \text{Semi-elasticitet}$$

Udnyt semielasticitet til at bestemme FOC

FOC (Første ordensbetingelse) er en betingelse der bruges til at bestemme de kritiske punkter for en funktion y og finde de lokale max og min:

$$FOC : \frac{dy}{dx} = 0 \tag{7}$$

I ligninger med mange produktled kan det være en fordel at bruge semielasticitet, $\frac{d\ln y}{dx} = 0$, og sætte det lig 0 for at bestemme de kritiske punkter for funktionen. Så længe $y \neq 0$ vil udtrykket for semielasticitet have samme nulpunkter mht. x som første afledte af y (Overbevis jer selv ved at sammenligne ligning (8) med (5).)